M Z M 1 | 氏名 カタカナで記入すること | 受験番号 | M Z M 1 受験番号

必ず2か所に受験番号を記入すること

（令和2年度） 数学(医) 解答用紙

解答欄

1.

(1) $x=\sqrt{2-\frac{2}{9^n}}$, $y=\frac{\sqrt{2}}{3^n}$ とおくと,

$$\frac{z_{n+1}}{z_n}=\frac{a_{n+1}+b_{n+1}i}{a_n+b_ni}$$
$$=\frac{(xa_n-yb_n)+(ya_n+xb_n)i}{a_n+b_ni}$$
$$=\frac{\{(xa_n-yb_n)+(ya_n+xb_n)i\}(a_n-b_ni)}{a_n^2+b_n^2}$$
$$=\frac{x(a_n^2+b_n^2)+y(a_n^2+b_n^2)i}{a_n^2+b_n^2}$$
$$=x+yi$$
$$=\sqrt{2-\frac{2}{9^n}}+\frac{\sqrt{2}}{3^n}i$$

$$\therefore \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|=\sqrt{2-\frac{2}{9^n}+\frac{2}{9^n}}=\sqrt{2}$$

(2) (1)より,

$$\frac{z_{n+1}}{z_n}=\sqrt{2-\frac{2}{9^n}}+\frac{\sqrt{2}}{3^n}i$$
$$=\sqrt{2}(\cos\theta_n+i\sin\theta_n)$$

虚部を比較して

$$\sqrt{2}\sin\theta_n=\frac{\sqrt{2}}{3^n}$$
$$\therefore \sin\theta_n=\frac{1}{3^n}$$

(3) 点$P_n(z_n)$とおくと,

(1)の結果より,

$$\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|=\sqrt{2}.$$
$$|z_{n+1}|=\sqrt{2}\,|z_n| \quad \cdots ①$$

数列$\{|z_n|\}$は, 初項$|z_1|=|a_1+b_1i|=1$, 公比$\sqrt{2}$の等比数列であるから,

$$|z_n|=(\sqrt{2})^{n-1}$$
$$\therefore OP_n=(\sqrt{2})^{n-1} \quad \cdots ②$$

また, (2)の結果より,

$$\theta_n=\arg\frac{z_{n+1}}{z_n}=\angle P_nOP_{n+1}$$
$$\therefore \sin\angle P_nOP_{n+1}=\sin\theta_n$$
$$=\frac{1}{3^n} \quad \cdots ③$$

よって,

$$T_n=\frac{1}{2}\cdot OP_n\cdot OP_{n+1}\cdot\sin\angle P_nOP_{n+1}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot OP_n^2\cdot\sin\angle P_nOP_{n+1}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 2^{n-1}\cdot\frac{1}{3^n} \quad (\because ①,②,③)$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{6}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

以上より,

$\sum_{n=1}^{\infty}T_n$ は初項$\frac{\sqrt{2}}{6}$, 公比$\frac{2}{3}$の無限等比級数であり, $-1<\frac{2}{3}<1$より その和は収束する.

したがって,

$$\sum_{n=1}^{\infty}T_n=\frac{\frac{\sqrt{2}}{6}}{1-\frac{2}{3}}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(1)採点欄 (1)採点欄

この線より右側に何も記入しないこと

（解答用紙の裏面には何も書かないこと。）

MZM2 | 氏名 カタカナで記入すること | 受験番号

必ず2か所に受験番号を記入すること

(令和2年度) 数学(医) 解答用紙

MZM2 受験番号

解答欄

2.

3枚の硬貨を同時に投げて，

① 3枚とも表が出る確率は，$\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$（1点を加点）

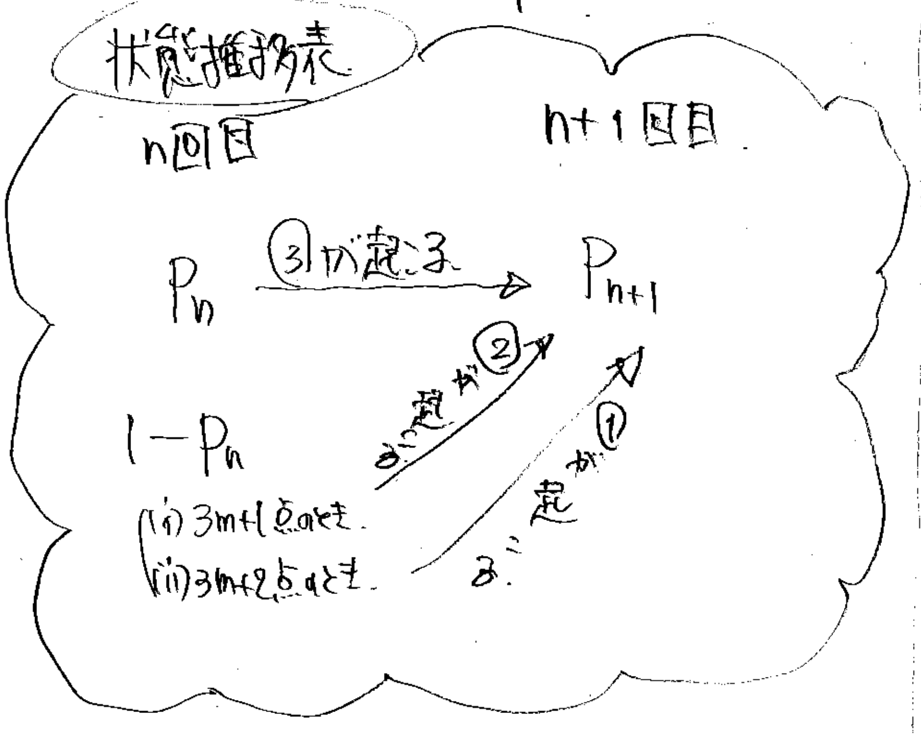
② 3枚とも裏が出る確率は，$\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$（1点を減点）

③ ①と②以外のときの確率は，$1-\frac{2}{8}=\frac{3}{4}$（得点変更なし）

(1) まず，P_1は③が起こるときであるから，

$$P_1=\frac{3}{4}$$

状態推移表



試行をn+1回繰り返した後の得点が3の倍数となるのは，

[1] n回試行して，3m点のとき（mは整数）

n+1回目で，得点を変更しなければよいから，

$$\frac{3}{4}$$

[2] n回試行して，3m点でないとき

(i) n回試行して，3m+1点のとき

n+1回目で1点を減点すればよいから，

$$\frac{1}{8}$$

(ii) n回試行して，3m+2点のとき

n+1回目で1点を加点すればよいから，

$$\frac{1}{8}$$

(i),(ii)より，n回試行して得点が3の倍数でないとき，n+1回目で得点が3の倍数となる確率は

$$\frac{1}{8}.$$

(2)採点欄

よって，[1]，[2]は互いに排反であるから，

$$P_{n+1}=\frac{3}{4}P_n+\frac{1}{8}(1-P_n)$$

$$=\frac{5}{8}P_n+\frac{1}{8}$$

これを変形して，

$$P_{n+1}-\frac{1}{3}=\frac{5}{8}\left(P_n-\frac{1}{3}\right)$$

よって，数列$\left\{P_n-\frac{1}{3}\right\}$は，初項$P_1-\frac{1}{3}=\frac{5}{12}$，公比$\frac{5}{8}$の等比数列であるから，

$$P_n-\frac{1}{3}=\frac{5}{12}\cdot\left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ \underline{P_n=\frac{5}{12}\cdot\left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}}\ //$$

(2)

$$\lim_{n\to\infty}P_n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{5}{12}\cdot\left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}\right\}$$

$$=\underline{\frac{1}{3}}\ //$$

(2)採点欄

この線より右側に何も記入しないこと

(解答用紙の裏面には何も書かないこと。)

M	Z	M	3

氏名 カタカナで記入すること

受験番号

必ず2か所に受験番号を記入すること →

(令和2年度) 数学(医) 解答用紙

M	Z	M	3

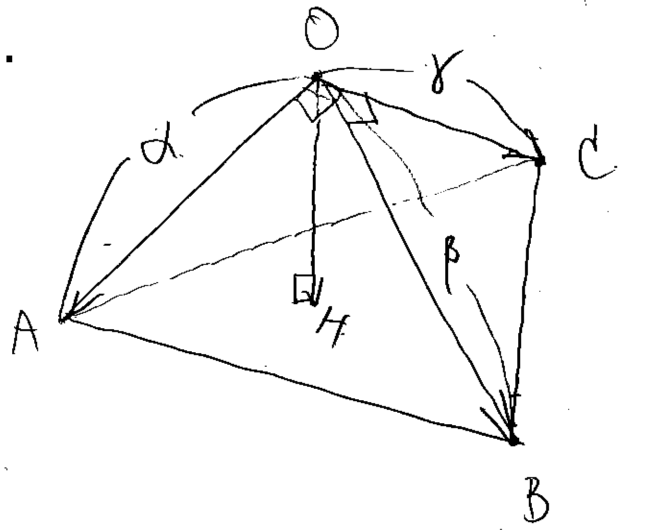
受験番号

解答欄

3.

(3)採点欄

(3)採点欄



(1) $\overrightarrow{OH} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ (x, y, zは実数)

とおくと、点Hは平面ABC上にあるから、

$x + y + z = 1$ ……①

次に、平面ABC⊥OHより

$\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

$(x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0$

ここで、$|\vec{a}|^2 = \alpha^2$, $|\vec{b}|^2 = \beta^2$, $|\vec{c}|^2 = \gamma^2$,

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 0$ であるから、

$-\alpha^2 x + \beta^2 y = 0$

$\beta^2 \neq 0$より、 $y = \dfrac{\alpha^2}{\beta^2} x$ ……②

$\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

同様にして、 $-\alpha^2 x + \gamma^2 z = 0$

$\gamma^2 \neq 0$より、 $z = \dfrac{\alpha^2}{\gamma^2} x$ …③

②、③を①に代入して、

$$\frac{\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2}{\beta^2\gamma^2} x = 1$$

$\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 \neq 0$より、 $x = \dfrac{\beta^2\gamma^2}{\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2}$

よって、②、③から

$y = \dfrac{\gamma^2\alpha^2}{\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2}$, $z = \dfrac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2}$

したがって、

$$\overrightarrow{OH} = \frac{1}{\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2}\left(\beta^2\gamma^2\vec{a} + \gamma^2\alpha^2\vec{b} + \alpha^2\beta^2\vec{c}\right)$$

//

(2) (1)の結果から、

$|\overrightarrow{OH}|^2$

$= \left(\dfrac{1}{\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2}\right)^2 \left|\beta^2\gamma^2\vec{a} + \gamma^2\alpha^2\vec{b} + \alpha^2\beta^2\vec{c}\right|^2$

$= \left(\dfrac{1}{\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2}\right)^2 \left(\alpha^2\beta^4\gamma^4 + \alpha^4\beta^2\gamma^4 + \alpha^4\beta^4\gamma^2\right)$

$= \left(\dfrac{\alpha\beta\gamma}{\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2}\right)^2 \left(\beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2\right)$

$= \dfrac{(\alpha\beta\gamma)^2}{\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2}$

$|\overrightarrow{OH}| \geq 0$ より、

$$|\overrightarrow{OH}| = \frac{\alpha\beta\gamma}{\sqrt{\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2}}$$

よって、四面体OABCの体積をVとおくと、

$$V = \frac{1}{3} \cdot \triangle ABC \cdot |\overrightarrow{OH}| = \frac{1}{3} \cdot \triangle OBC \cdot OA$$

$\therefore \triangle ABC = \dfrac{1}{2}\beta\gamma \cdot \alpha \cdot \dfrac{\sqrt{\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2}}{\alpha\beta\gamma}$

$= \dfrac{\sqrt{\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2}}{2}$

//

この線より右側に何も記入しないこと

(解答用紙の裏面には何も書かないこと。)

M Z M 4

氏名 カタカナで記入すること

受験番号

必ず2か所に受験番号を記入すること

(令和2年度) 数学(医) 解答用紙

M Z M 4

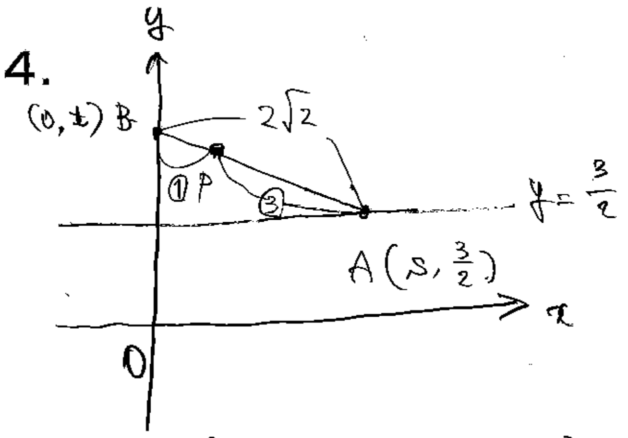
受験番号

解答欄

(4)採点欄

(4)採点欄

4.



(1) 求める曲線C上の点Pを(x, y)とおき、

直線 $y=\frac{3}{2}$ 上の点Aを$(s, \frac{3}{2})$、

y軸上の点Bを$(0, t)$とおく。

条件より、$AB=2\sqrt{2}$

$$AB^2=8$$

$$s^2+\left(t-\frac{3}{2}\right)^2=8 \cdots\cdots ①$$

また、点Pは線分ABを3:1に内分するから、

$$x=\frac{s}{4},\quad y=\frac{3t+\frac{3}{2}}{4}$$

$$\therefore s=4x,\quad t=\frac{4}{3}y-\frac{1}{2}$$

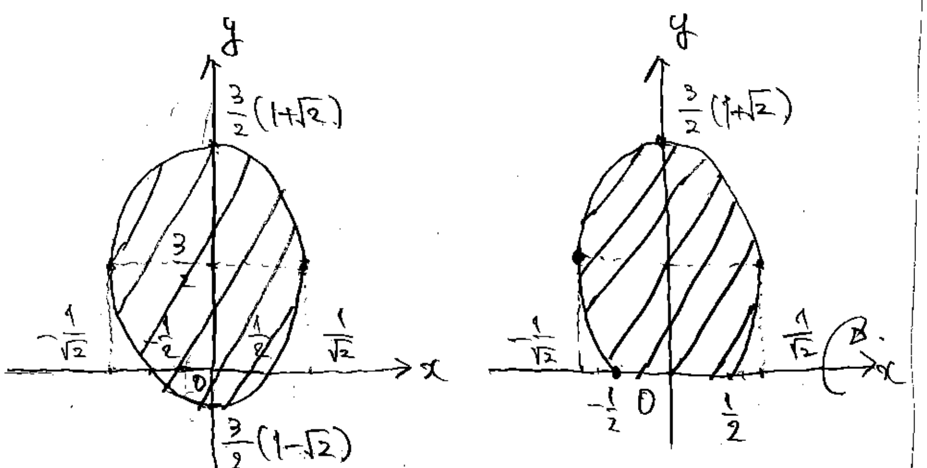
これらを①に代入して、sとtを消去すると、

$$16x^2+\left(\frac{4}{3}y-2\right)^2=8$$

したがって、曲線Cの方程式は、

$$2x^2+\frac{2}{9}\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=1 \quad //$$

(2) 曲線Cで囲まれた図形は下の左図の斜線部となる。



上の左図の斜線部分で、x軸より下側の部分をx軸に関して対称移動させると上の右図の斜線部となる。

この図形の回転体積が求める立体の体積となる。

曲線Cの方程式より

$$2x^2+\frac{2}{9}\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=1$$

$$\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{2}\left(1-2x^2\right)$$

$$y=\frac{3}{2}\pm 3\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}$$

$$\therefore y^2=\frac{27}{4}-9x^2\pm 9\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}$$

よって、求める体積をVとおくと、y軸対称であるから、

$$V=2\pi\left\{\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{3}{2}+3\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}\right)^2dx-\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{3}{2}-3\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}\right)^2dx\right\}$$

$$=2\pi\left\{\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{27}{4}-9x^2\right)dx+9\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}\,dx\right.$$

$$\left.-\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{27}{4}-9x^2\right)dx+9\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}\,dx\right\}$$

$$=2\pi\left\{\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{27}{4}-9x^2\right)dx+9\cdot\pi\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{4}\right.$$

$$\left.+9\left(\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$=2\pi\left\{\left[\frac{27}{4}x-3x^3\right]_0^{\frac{1}{2}}+\frac{9}{8}\pi+9\left(\frac{\pi}{16}-\frac{1}{8}\right)\right\}$$

$$=2\pi\left(\frac{27}{8}-\frac{3}{8}+\frac{9}{8}\pi+\frac{9}{16}\pi-\frac{9}{8}\right)$$

$$=\pi\left(6-\frac{9}{4}+\frac{27}{8}\pi\right)$$

$$=9\pi\left(\frac{3}{8}\pi+\frac{5}{12}\right) \quad //$$

この線より右側に何も記入しないこと

(解答用紙の裏面には何も書かないこと。)