解説

$\boxed{1}$ (1) $5\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{PA}}-3\overrightarrow{\mathrm{PB}} \iff 5\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})-3(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}) \iff 3\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-3\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

よって, $\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{3}\vec{a}-\vec{b}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+s\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ とおく。

G は $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心であるから, $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$

よって, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-s)\left(\frac{1}{3}\vec{a}-\vec{b}\right)+s\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)=\frac{1}{3}\vec{a}+\left(\frac{4}{3}s-1\right)\vec{b}+\frac{1}{3}s\vec{c}$

点 Q が平面 OAC 上にあるとき, $\frac{4}{3}s-1=0$ すなわち $s=\frac{3}{4}$

であるから, $\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{c}}$

(3) $\frac{\mathrm{OR}}{\mathrm{OA}}=t$ とおくと, $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=t\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}=t\,\vec{a}$

$\triangle\mathrm{PQR}$ が PQ を斜辺とする直角三角形になるとき, $\overrightarrow{\mathrm{RP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=0$ であるから,

$$\overrightarrow{\mathrm{RP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=0 \iff (\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OR}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OR}})=0$$

$$\iff \left(\frac{1}{3}\vec{a}-\vec{b}-t\vec{a}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{c}-t\vec{a}\right)=0$$

これに, $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{1}{2}|\vec{a}|^2$ を代入して, 式を整理すると

$$72t^2-21t-10=0$$

点 R は線分 OA 上に存在するので, $0<t<1$

したがって, $\boldsymbol{\frac{\mathrm{OR}}{\mathrm{OA}}=t=\frac{7+3\sqrt{41}}{48}}$

(解説)

$\boxed{2}$ (1)　箱 B に入っている玉が赤玉 1 個となるのは，片方の袋から赤玉 1 個，もう片方の袋からそれ以外の玉を 1 個とるときであるから，

$${}_2C_1\left(\frac{2}{10}\right)^1\left(\frac{8}{10}\right)^1=\frac{8}{25}$$

箱 B に入っている玉が赤玉 2 個となるのは，それぞれの袋から赤玉 1 個ずつとるときであるから，

$${}_2C_2\left(\frac{2}{10}\right)^2\left(\frac{8}{10}\right)^0=\frac{1}{25}$$

(2)　箱 B に赤玉が 1 個だけ入っているとき

操作 3 まで行っていずれも赤玉が記録される確率は，　$\frac{8}{25}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{25}$

箱 B に赤玉が 2 個入っているとき

操作 3 まで行っていずれも赤玉が記録される確率は，　$\frac{1}{25}\cdot1\cdot1=\frac{1}{25}$

よって，操作 3 まで行って記録された玉の色がいずれも赤であったとき，箱 B に赤玉が 1 個だけ入っている条件つき確率は，

$$\frac{\frac{2}{25}}{\frac{2}{25}+\frac{1}{25}}=\frac{2}{3}$$

操作 3 まで行って記録された玉の色がいずれも赤であったとき，箱 B に赤玉が 2 個入っている条件つき確率は，

$$\frac{\frac{1}{25}}{\frac{2}{25}+\frac{1}{25}}=\frac{1}{3}$$

(3)　箱 B の中の玉が赤玉 1 個，青玉 1 個となった上で操作 4 で赤玉と青玉をとる確率は

箱 B の中の玉が赤玉 1 個，青玉 1 個となる確率が　${}_2C_1\left(\frac{2}{10}\right)^1\left(\frac{4}{10}\right)^1=\frac{4}{25}$

操作 2，3 で両方とも赤をとる確率が　$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

操作 4 で赤玉と青玉をとる確率が　${}_2C_1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

であるから，このような確率は　$\frac{4}{25}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{50}$

箱 B の中の玉が赤玉 1 個，白玉 1 個となった上で操作 4 で赤玉と青玉をとる確率は

箱 B の中の玉が赤玉 1 個，白玉 1 個となる確率が　${}_2C_1\left(\frac{2}{10}\right)^1\left(\frac{4}{10}\right)^1=\frac{4}{25}$

操作 2，3 で両方とも赤をとる確率が　$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

　　操作 4 で赤玉と青玉をとる確率が　　$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

であるから，このような確率は　　$\frac{4}{25}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{100}$

箱 B の中の玉が赤玉 2 個となった上で操作 4 で赤玉と青玉をとる確率は

箱 B の中の玉が赤玉 2 個となる確率が　　${}_2C_2\left(\frac{2}{10}\right)^2=\frac{1}{25}$

　　操作 2, 3 で両方とも赤をとる確率が　　$1\cdot1=1$

　　操作 4 で赤玉と青玉をとる確率が　　$1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

であるから，このような確率は　　$\frac{1}{25}\cdot1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{50}$

よって，求める条件つき確率は，　　$\dfrac{\frac{1}{50}+\frac{1}{100}+\frac{1}{50}}{\frac{1}{25}}=\frac{5}{12}$

解説

$\boxed{3}$ (1)　3^n を 10 で割った余りは，3，9，7，1，$\cdots$ を繰り返し，

2^n を 10 で割った余りは，2，4，8，6，$\cdots$ を繰り返す。

したがって，3^n-2^n を 10 で割った余りは，1，5，9，5，$\cdots$ を繰り返すので，

l を整数として，$\begin{cases} \mathbf{1}\ (n=4l-3\ \text{のとき}) \\ \mathbf{5}\ (n=4l-2,\ 4l\ \text{のとき}) \\ \mathbf{9}\ (n=4l-1\ \text{のとき}) \end{cases}$

(2)　$4n$ を 10 で割った余りは，4，8，2，6，0，$\cdots$ を繰り返す。

n を 4 で割った余りを $s\,(s=0,\ 1,\ 2,\ 3)$，5 で割った余りを $t\,(t=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ とすると

$r_n=(3^n-2^n)+4n$ を 10 で割った余りは以下のようになる。

s \ t	0	1	2	3	4
0	$5+0$	$5+4$	$5+8$	$5+2$	$5+6$
1	$1+0$	$1+4$	$1+8$	$1+2$	$1+6$
2	$5+0$	$5+4$	$5+8$	$5+2$	$5+6$
3	$9+0$	$9+4$	$9+8$	$9+2$	$9+6$

すなわち

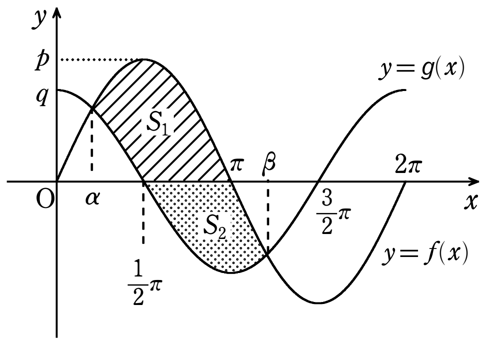
s \ t	0	1	2	3	4
0	5	9	3	7	1
1	1	5	9	3	7
2	5	9	3	7	1
3	9	3	7	1	5

これより，n を 20 で割った余りが 7，8，9，18 となるとき，$r_n=7$ となる。

したがって，$n=18+20\cdot(25-1)=\mathbf{498}$

解説

$\boxed{4}$ S_1 は右図の斜線部，S_2 は網線部の面積を表す。



$y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共有点の x 座標 α, β は

連立方程式 $\begin{cases} y=p\sin x \\ y=q\cos x \end{cases}$ の解であるから，

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$\pi<\beta<\dfrac{3}{2}\pi$ に注意して，

$$\sin\alpha=\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}},\ \cos\alpha=\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}},$$

$$\sin\beta=\frac{-q}{\sqrt{p^2+q^2}},\ \cos\beta=\frac{-p}{\sqrt{p^2+q^2}}$$

である。また，面積 S_1，S_2 は

$$S_1=\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}(p\sin x-q\cos x)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}p\sin x\,dx=\Big[-p\cos x-q\sin x\Big]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}+p=\sqrt{p^2+q^2}+p-q$$

$$S_2=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}q\cos x\,dx+\int_{\pi}^{\beta}(p\sin x-q\cos x)dx=q+\Big[-p\cos x-q\sin x\Big]_{\pi}^{\beta}=\sqrt{p^2+q^2}-p+q$$

であるから，

$$\begin{aligned} S_1:S_2&=\frac{S_1}{\sqrt{p^2+q^2}}:\frac{S_2}{\sqrt{p^2+q^2}} \\ &=\left(1+\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}-\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}\right):\left(1-\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}+\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}\right) \\ &=(1+\cos\alpha-\sin\alpha):(1-\cos\alpha+\sin\alpha) \end{aligned}$$

よって，　$S_1:S_2=(\sqrt{2}+1):(\sqrt{2}-1)$

$\iff (1+\cos\alpha-\sin\alpha):(1-\cos\alpha+\sin\alpha)=(\sqrt{2}+1):(\sqrt{2}-1)$

であるから，これを解いて，　$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

したがって，　$\boldsymbol{\alpha=\dfrac{\pi}{12}}$

またこのとき，　$\sin\beta=\dfrac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，$\cos\beta=\dfrac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

であるから，　$\boldsymbol{\beta=\dfrac{13}{12}\pi}$