入試問題研究

医学部への合格 on the road　東北大学(前期)/藤田医科大学(前期)・数学

2019年度 東北大学(前期) $\boxed{3}$ より抜粋

$\boxed{3}$ aを実数とし,数列 $\{x_n\}$ を次の漸化式によって定める。

$$x_1=a,\quad x_{n+1}=x_n+x_n^2\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

(1) 省略

(2) $-1<a<0$ のとき,すべての正の整数 n に対して $-1<x_n<0$ が成り立つことを示せ。

(3) $-1<a<0$ のとき,数列 $\{x_n\}$ の極限を調べよ。

解答・解説

(2) $-1<a<0$ のとき, $x_1=a$より $n=1$のとき成立.

$-1<x_k<0$ (kは正の整数)と仮定すると $0<1+x_k<1$ で $x_{k+1}=x_k(1+x_k)$ なので

$-1<x_{k+1}<0$ となり $k+1$のときも成立.

よって,数学的帰納法によりすべての正の整数 n に対して $-1<x_n<0$ が成り立つ.

(3) (2)より $-1<a<0$ のとき $-1<x_n<0$ である.

$f(x)=x+x^2$ とおくと, $x_n<x<0$ において $f(x)$ は微分可能であるから,平均値の定理より

$$\frac{f(0)-f(x_n)}{0-x_n}=f'(c)\ \cdots\cdots①,\quad x_n<c<0$$

を満たす実数 c が存在する.

$$f'(x)=1+2x,\ ①より\ \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|=|1+2c|\quad\cdots\cdots②$$

また, $-1<x_n<c<0$ より $|1+2c|<1$ なので

$|1+2c|\leqq p\ (0<p<1)$ を満たす実数p が存在する.

$$②より\quad\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|\leqq p\ \Leftrightarrow |x_{n+1}|\leqq p|x_n|$$

よって, $0\leqq|x_n|\leqq p|x_{n-1}|\leqq p^2|x_{n-2}|\leqq\cdots\leqq p^{n-1}|x_1|$

$\lim_{n\to\infty}p^{n-1}|x_1|=0$ より $\lim_{n\to\infty}|x_n|=0$

以上より数列 $\{x_n\}$ の極限は 0 に収束する.

2018年度 藤田保健衛生大学[現藤田医科大学](前期)問題1(8)より抜粋

問題1 次の問いに答えよ

(8) 数列 $\{a_n\}$ が $a_1=9,\ a_{n+1}=\dfrac{30a_n-32}{a_n+12}$ $(n=1,2,3,\cdots)$で定義されているとき,

$\lim_{n\to\infty}a_n=$ $\boxed{ヌネ}$ である。

解答・解説

(1) 特性方程式 $x=\dfrac{30x-32}{x+12}$ の解 $x=2,16$ を用いて与えられた漸化式を変形すると,

$$a_{n+1}-2=\frac{30a_n-32}{a_n+12}-2=\frac{28(a_n-2)}{a_n+12}\ \cdots\cdots①$$

$$a_{n+1}-16=\frac{30a_n-32}{a_n+12}-16=\frac{14(a_n-16)}{a_n+12}\ \cdots\cdots②$$

ある2以上の自然数Nに対して $a_N-2=0$ と仮定すると①より

$$a_N-2=\frac{28(a_{N-1}-2)}{a_{N-1}+12}=0\Leftrightarrow a_{N-1}-2=0$$

これを繰り返すと$a_1-2=0\Leftrightarrow a_1=2$ となり, $a_1=9$ に矛盾する.

よって$a_n-2\neq0$ $(n=1,2,3,\cdots)$ である.

$$②\div①より\ \frac{a_{n+1}-16}{a_{n+1}-2}=\frac{1}{2}\ \frac{a_n-16}{a_n-2}$$

$$よって\ \frac{a_n-16}{a_n-2}=\frac{a_1-16}{a_1-2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\Leftrightarrow a_n=\frac{16\cdot2^{n-1}+2}{2^{n-1}+1}$$

$$したがって,\ \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{16+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}=16$$

[参考]

この出題は小問集合で,答えのみ解答であるため,

$a_1=9,\ a_{n+1}-9=\dfrac{21(a_n-9)+49}{(a_n-9)+21}$ から $a_n-9\geqq0\Leftrightarrow a_n\geqq9$ $(n=1,2,3,\cdots)$ が帰納的に示され,

“漸化式を満たす数列の極限”は特性方程式の解ということから $\lim_{n\to\infty}a_n=16$ と解答することも可能である.

講評

ここで取り上げた2題は漸化式と数列の極限の問題である。2019年度東北大学(前期) $\boxed{3}$ は漸化式を解いて一般項を求めることが出来ない数列の極限である。このテーマは標準的な参考書・問題集でよく取り上げてはあるものの誘導がついており、現役生は誘導に乗って『解けたからよし』と解法をおさえずに済ましてしまうであろう。

また、2018年度藤田保健衛生大学[現藤田医科大学](前期)問題1(8)は漸化式を解いて一般項を得ることはできるものの、こちらも参考書・問題集では置き換えの誘導がついている。こちらも同様に解法をおさえずに済ましてしまうであろう。

今回取り上げたテーマに限らず、標準的な参考書に掲載されている内容は『誘導に乗って解く』だけでなく、医学部を目指す学生は誘導がなくても『自身で判断して解く』、『解法をおさえる』ことを意識して学習に取り組んでおくべきである。

(メディカルラボ 数学科講師　松岡和哉)