入試問題研究

医学部合格へ　on the road　信州大学/東京医科大学・数学

2020年度 信州大学(前期) $\boxed{4}$ より抜粋

$\boxed{4}$ 変量 a のデータの値が

$$a_k=\cos(2k\theta)\qquad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n)$$

であるとする。ただし，$0<\theta<\pi$ である。

(1)データの平均値 $\overline{a}$ は

$$\overline{a}=\frac{1}{2n\sin\theta}\{\sin(2n\theta+\theta)-\sin\theta\}$$

で与えられることを示せ。

解答・解説

(1)　$\alpha=\cos2\theta+i\sin2\theta$ とおくと， $\alpha\neq1$ なので

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha^k=\frac{\alpha(1-\alpha^n)}{1-\alpha}=\frac{(\cos2\theta+i\sin2\theta)\{1-(\cos2n\theta+i\sin2n\theta)\}}{1-(\cos2\theta+i\sin2\theta)}$$

$$=\frac{(\cos2\theta+i\sin2\theta)(2\sin^2 n\theta-2i\sin n\theta\cos n\theta)}{2\sin^2\theta-2i\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\frac{\sin n\theta(\cos2\theta+i\sin2\theta)\left\{\cos\left(n\theta-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(n\theta-\frac{\pi}{2}\right)\right\}}{\sin\theta\left\{\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\right\}}$$

$$=\frac{\sin n\theta\{\cos(n\theta+\theta)+i\sin(n\theta+\theta)\}}{\sin\theta}$$

また，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\alpha^k=\sum_{k=1}^{n}(\cos2k\theta+i\sin2k\theta)=\sum_{k=1}^{n}\cos2k\theta+i\sum_{k=1}^{n}\sin2k\theta$ より

$$\sum_{k=1}^{n}\cos2k\theta=\frac{\sin n\theta\cos(n\theta+\theta)}{\sin\theta}=\frac{1}{2\sin\theta}\{\sin(2n\theta+\theta)-\sin\theta\}$$

よって，$\displaystyle\overline{a}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{2n\sin\theta}\{\sin(2n\theta+\theta)-\sin\theta\}$

2020年度 東京医科大学　第1問(4) より抜粋

第1問

(4)不等式

$$(\sqrt[3]{n+1})^4-(\sqrt[3]{n})^4>40$$

をみたす正の整数 n の最小値は $\boxed{キクケコサ}$ である。

解答・解説

(4)　$\displaystyle(\sqrt[3]{n+1})^4-(\sqrt[3]{n})^4=\Big[(\sqrt[3]{x})^4\Big]_n^{n+1}=\int_n^{n+1}\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}\,dx$

$f(x)=\sqrt[3]{x}$ とすると，$n\leqq x\leqq n+1$ において，

$\displaystyle f'(x)=\frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}>0$ なので，$f(x)$は単調増加であるから，

$\displaystyle f(n)\leqq f(x)\leqq f(n+1)\Leftrightarrow\frac{4}{3}\sqrt[3]{n}\leqq\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}\leqq\frac{4}{3}\sqrt[3]{n+1}$

よって，$\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{4}{3}\sqrt[3]{n}\,dx<\int_n^{n+1}\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}\,dx<\int_n^{n+1}\frac{4}{3}\sqrt[3]{n+1}\,dx$

$\displaystyle\Leftrightarrow\frac{4}{3}\sqrt[3]{n}<\int_n^{n+1}\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}\,dx<\frac{4}{3}\sqrt[3]{n+1}$

$\displaystyle\frac{4}{3}\sqrt[3]{30^3}=40$ より求める最小の n は 27000.

講評

ここで取り上げた2題は，問題文を一見した時と解法の単元が全く異なる問題である。2020年度信州大学(前期) $\boxed{4}$ は見た目はデータ分析(数学Ⅰ)であるが，解法には複素数平面(数学Ⅲ)を用いている。sin,cosのΣ計算に複素数平面を用いることは典型解法で，受験勉強をしていると必ず出会う解法ではあるが，現役生は微積分に時間を割いてここまで手が回らなかったかもしれない。ただ，この問題に関しては数学的帰納法でも証明が可能であるため得点することはできるが，もしも設問が「$\overline{a}$ を $\sin(2n\theta+\theta)$，$\sin\theta$を用いて表せ。」などとなっていた場合は対応できない。

また，2020年度東京医科大学第1問(4)は見た目は整数問題(数学A)ではあるが，解法は積分法の応用(数学Ⅲ)である。この解法はやや発想し難いが，同様の考え方でアプローチする問題が2014年度大阪大学$\boxed{3}$や2018年度愛知医科大学 Ⅱ.3)などで出題されているため，しっかり問題演習に取り組んでいれば対応可能である。

このように，教科書やチャート等の参考書で基本事項を学習した後，問題演習に取り組んでおくことは重要である。その際，問題が解けたかどうかだけではなく，流れをしっかり理解しておくべきである。医学部を目指す生徒であれば，よりハイレベルな問題に対する知識・経験を増やすことも必要である。　　(メディカルラボ　数学科講師　松岡和哉)