M Z M 1　　氏名 カタカナで記入すること　　受験番号

必ず2か所に受験番号を記入すること →

M Z M 1　受験番号

見本

(令和4年度)　数学(医)　　解答用紙

解　答　欄

(1)採点欄

(1)採点欄

1.

(1) $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ より $f'(x)=\dfrac{1-\log x}{x^2}$, $f''(x)=\dfrac{-\frac{1}{x}x^2-(1-\log x)\cdot 2x}{x^4}=\dfrac{2\log x-3}{x^3}$

であるから、これより増減は以下のようになる。

x	0	…	e	…	$e\sqrt{e}$	…
$f'(x)$		+	0	−	−	−
$f''(x)$		−	−	−	0	+
$f(x)$		↗	$\frac{1}{e}$	↘	$\frac{3}{2e\sqrt{e}}$	↘

また、

$\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)=-\infty$

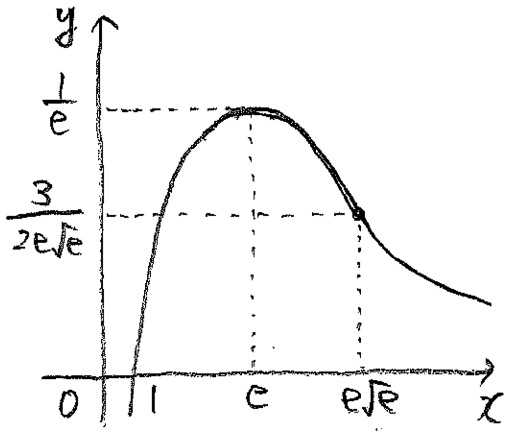
$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=0$

よって　極大値は $x=e$ のとき $\frac{1}{e}$

極小値は　なし

変曲点は $\left(e\sqrt{e},\ \frac{3}{2e\sqrt{e}}\right)$

概形は右図のようになる



(2) $m<n$ となる自然数 m, n について

$m^n=n^m \iff \dfrac{\log m}{m}=\dfrac{\log n}{n} \iff f(m)=f(n)$

ここで $f(m)=f(n)=c$ とおく。$f(x)=c$ が m, n を解にもつには $0<c<\frac{1}{e}$ が必要。

このとき、$1<m<e$, $e<n$ であるから、m にあてはまる自然数は $m=2$ のみであり、

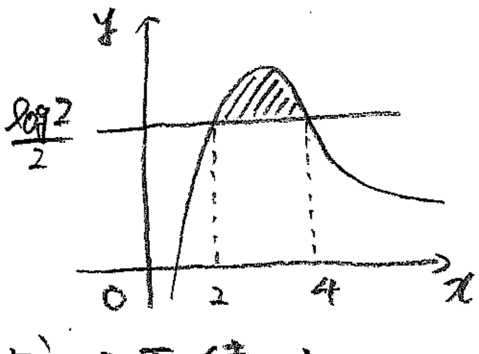
これに対応する n の値はただ1つ存在する。

ここで $n=4$ とすると $f(2)=f(4)=\dfrac{\log 2}{2}$ となり成立。したがって $(m, n)=(2, 4)$

(3) 求める面積を S とする。

(2)の結果より

$\begin{cases} y=\dfrac{\log x}{x} \\ y=\dfrac{\log 2}{2} \end{cases}$



の交点の x 座標は $x=2, 4$ であるから、求める面積 S は

$$S=\int_2^4\left(\frac{\log x}{x}-\frac{\log 2}{2}\right)dx=\left[\frac{1}{2}(\log x)^2-\frac{\log 2}{2}x\right]_2^4$$

$$=\frac{1}{2}\left\{(\log 4)^2-(\log 2)^2\right\}-\frac{\log 2}{2}(4-2)$$

$$=\frac{3}{2}(\log 2)^2-\log 2$$

この線より右側に何も記入しないこと

氏名 カタカナで記入すること

受験番号

必ず２か所に受験番号を記入すること →

見本

(令和４年度) 数学(医) 解答用紙

MZM2

受験番号

解答欄

2.

(1) 点Iは内心であるから，各内角の二等分線の交点である。直線OIと辺ABの交点を点Cとする。直線OCは∠AOBの二等分線であるから，

$AC : CB = OA : OB = a : b$

これより，$AC = \frac{a}{a+b}c$ …①

直線AIは∠OABの二等分線であるから

$OI : IC = OA : AC$

これと①より

$OI : IC = a : \frac{ac}{a+b} = (a+b) : c$

これより，点Cは線分ABを$a:b$に内分する点であり，内心Iは，線分OCを$(a+b):c$に内分する点であるから

$$\overrightarrow{OI} = \frac{(a+b)}{(a+b)+c}\overrightarrow{OC}$$
$$= \frac{a+b}{a+b+c}\cdot\frac{b\overrightarrow{OA} + a\overrightarrow{OB}}{a+b}$$
$$= \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{OA} + \frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{OB}$$

(2) 点L，M，Nは辺OA，OB，ABの中点であるから，

$\overrightarrow{OL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ …②

$\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

点Pは直線NI上の点であるから，tを実数として

$$\overrightarrow{OP} = (1-t)\overrightarrow{ON} + t\overrightarrow{OI}$$
$$= (1-t)\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right) + t\left(\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{OA} + \frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{OB}\right)$$

より

$$\overrightarrow{OP} = \left(\frac{1}{2} + \frac{bt}{a+b+c} - \frac{1}{2}t\right)\overrightarrow{OA} + \left(\frac{1}{2} + \frac{at}{a+b+c} - \frac{1}{2}t\right)\overrightarrow{OB}$$ …③

②より

$$\overrightarrow{OP} = \left(\frac{1}{2} + \frac{bt}{a+b+c} - \frac{1}{2}t\right)2\overrightarrow{OL} + \left(\frac{1}{2} + \frac{at}{a+b+c} - \frac{1}{2}t\right)2\overrightarrow{OM}$$
$$= \left(1 + \frac{2bt}{a+b+c} - t\right)\overrightarrow{OL} + \left(1 + \frac{2at}{a+b+c} - t\right)\overrightarrow{OM}$$

(2)採点欄

点Pは直線LM上に存在するので

$$\left(1 + \frac{2bt}{a+b+c} - t\right) + \left(1 + \frac{2at}{a+b+c} - t\right) = 1$$

これより　$t = \frac{a+b+c}{2c}$

これを③に代入して

$$\overrightarrow{OP} = \frac{-a+b+c}{4c}\overrightarrow{OA} + \frac{a-b+c}{4c}\overrightarrow{OB}$$

次に，円Cと辺OA，OBの接点を点S，Rとおく。

このとき，円と接線の性質より

$OS = OR$，$AS = AQ$，$BQ = BR$

また　$OA + OB + AB = a + b + c$　であるから

これを解いて　$AQ = \frac{c+a-b}{2}$，$BQ = \frac{b+c-a}{2}$

よって点Qは辺ABを$(a-b+c):(-a+b+c)$に内分する点であるから

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{(-a+b+c)\overrightarrow{OA} + (a-b+c)\overrightarrow{OB}}{(a-b+c)+(-a+b+c)}$$
$$= \frac{-a+b+c}{2c}\overrightarrow{OA} + \frac{a-b+c}{2c}\overrightarrow{OB}$$

これより　$\overrightarrow{OQ} = 2\overrightarrow{OP}$　であるから，

点O，P，Qは同一直線上に存在する。

(2)採点欄

← この線より右側に何も記入しないこと

M	Z	M	3

氏名 カタカナで記入すること

受験番号

必ず2か所に受験番号を記入すること →

M	Z	M	3

受験番号

（令和4年度） 数学(医)　　解答用紙

見本

解答欄

(3)採点欄　(3)採点欄

この線より右側に何も記入しないこと

3.

(1) 硬貨を投げたとき、表が出る確率と裏が出る確率は等しく$\frac{1}{2}$とする。

10回硬貨を投げて表がk回、裏が10−k回出る確率は ${}_{10}C_k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{10-k}=\frac{{}_{10}C_k}{2^{10}}$

であり、このとき点は進行方向に向かって $2k+1\cdot(10-k)=k+10$ 進む。

各kに対し、これが起こる確率は

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
確率	$\frac{1}{1024}$	$\frac{10}{1024}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{120}{1024}$	$\frac{210}{1024}$	$\frac{252}{1024}$	$\frac{210}{1024}$	$\frac{120}{1024}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{10}{1024}$	$\frac{1}{1024}$

であるから、点Pが到達する点とその確率は以下の表のようになる。

点	k	確率
A	2,6,10	$\frac{45}{1024}+\frac{210}{1024}+\frac{1}{1024}=\frac{1}{4}$
B	1,5,9	$\frac{10}{1024}+\frac{252}{1024}+\frac{10}{1024}=\frac{17}{64}$
C	0,4,8	$\frac{1}{1024}+\frac{210}{1024}+\frac{45}{1024}=\frac{1}{4}$
D	3,7	$\frac{120}{1024}+\frac{120}{1024}=\frac{15}{64}$

したがって、
点Aにある確率は$\frac{1}{4}$、
点Bにある確率は$\frac{17}{64}$、
点Cにある確率は$\frac{1}{4}$、
点Dにある確率は$\frac{15}{64}$。

(2) (1)と同様に考えると、点Qが到達する点とその確率は、

点	k	確率
A	1,5,9	$\frac{10}{1024}+\frac{252}{1024}+\frac{10}{1024}=\frac{17}{64}$
B	2,6,10	$\frac{45}{1024}+\frac{210}{1024}+\frac{1}{1024}=\frac{1}{4}$
C	3,7	$\frac{120}{1024}+\frac{120}{1024}=\frac{15}{64}$
D	0,4,8	$\frac{1}{1024}+\frac{210}{1024}+\frac{45}{1024}=\frac{1}{4}$

したがって、
点Aにある確率は$\frac{17}{64}$
点Bにある確率は$\frac{1}{4}$、
点Cにある確率は$\frac{15}{64}$
点Dにある確率は$\frac{1}{4}$。

よって点PとQが同じ頂点にある確率は

$\frac{1}{4}\times\frac{17}{64}+\frac{17}{64}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{15}{64}+\frac{15}{64}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

であるから点Pと点Qが異なる頂点にある確率は

$1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

（解答用紙の裏面には何も書かないこと。）

M Z M 4

氏名 カタカナで記入すること

受験番号

必ず２か所に受験番号を記入すること →

（令和４年度） 数学(医) 解答用紙

見本

解答欄

(4)採点欄

M Z M 4

受験番号

(4)採点欄

この線より右側に何も記入しないこと

4.

(1) 第k群の末項までの項数は

$$\sum_{i=1}^{k}(i+2^{i-1})=\frac{1}{2}k(k+1)+\frac{2^k-1}{2-1}=\frac{1}{2}k(k+1)+2^k-1 \quad \cdots ①$$

である。第500項が第k群に含まれるとすると

$$\frac{1}{2}(k-1)k+2^{k-1}-1<500\leqq\frac{1}{2}k(k+1)+2^k-1$$

が成り立つ。これをみたすkの値は$k=9$であるから、a_{500}は第9群に含まれる。

したがって、$a_{500}=\frac{1}{256}$

(2) 第k群の各項は$2^{-(k-1)}$、項数は$k+2^{k-1}$であるから、

$$S_k=2^{-(k-1)}\cdot(k+2^{k-1})=k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}+1$$

よって、$\sum_{i=1}^{k}S_i=\sum_{i=1}^{k}\left\{i\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}+1\right\}=\sum_{i=1}^{k}i\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}+\sum_{i=1}^{k}1$

ここで、$T_k=\sum_{i=1}^{k}i\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \cdots ②$ とおく。

② $-\frac{1}{2}\times$ ② より

$$\begin{array}{rl} T_k = & 1\cdot1+2\left(\frac{1}{2}\right)+3\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\ -)\ \frac{1}{2}T_k = & \quad 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+3\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}+k\left(\frac{1}{2}\right)^k \\ \hline \frac{1}{2}T_k = & 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}-k\left(\frac{1}{2}\right)^k \end{array}$$

$$=1\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^k}{1-\frac{1}{2}}-k\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$=2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}-k\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

これより、$T_k=4\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}-2k\left(\frac{1}{2}\right)^k$

したがって、$\sum_{i=1}^{k}S_i=\sum_{i=1}^{k}i\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}+\sum_{i=1}^{k}1=4\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}-2k\left(\frac{1}{2}\right)^k+k$

(3) 第2022項が第k群に含まれるとすると

$$\frac{1}{2}(k-1)k+2^{k-1}-1<2022\leqq\frac{1}{2}k(k+1)+2^k-1$$

が成り立つ。これをみたすkの値は$k=11$であるから、a_{2022}は第11群に含まれる。

①より、第10群の末項までの項数は1078であるから、

a_{2022}は第11群の第944番目である。

よって、求める和は、$\sum_{j=1}^{2022}a_j$であるから、

$$\sum_{j=1}^{2022}a_j=\sum_{i=1}^{10}S_i+\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\cdot944$$

$$=4\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}-2\cdot10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10}+10+\frac{944}{1024}$$

$$=\frac{1907}{128}$$

（解答用紙の裏面には何も書かないこと。）