1. 4点 $O(0,0,0)$, $A(2,1,4)$, $B(3,0,1)$, $C(1,2,1)$ を頂点とする四面体 OABC を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 3点 O, B, C が定める平面に，点 A から垂線 AH をおろす。点 H の座標を求めよ。

(2) 三角形 OBC の面積と四面体 OABC の体積を求めよ。

(3) 4点 O, A, B, C を通る球面の方程式を求めよ。

2. 6色の異なる色を用いて，正六面体の面を塗り分ける方法について考える。ただし，辺をはさんで隣り合う面どうしは異なる色を用いることとし，正六面体を回転させて一致する塗り分け方どうしは区別しないこととする。以下の問いに答えよ。

(1) 6色すべての色を用いて塗り分ける方法は何通りあるか。

(2) 6色のうち何色かを用いて塗り分ける方法は何通りあるか。

3. m を正の整数とする。数列 $\{a_n\}$ は

$$\begin{cases} a_1 = 0, \\ a_{n+1} = a_n + m^{n+1} - m^n - m \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \end{cases}$$

をみたすとする。以下の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) $a_9 = 494$ をみたす正の整数 m を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ に素数である項が含まれるような正の整数 m を求めよ。

4. n を 0 以上の整数とする。区間 $1 \leqq x \leqq \pi$ で定義された関数

$$f_n(x) = \frac{\sin \frac{2n+1}{2}x}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

および定積分

$$I_n = \int_1^{\pi} f_n(x)dx$$

について，以下の問いに答えよ。

(1) 正の整数 k に対して $f_k(x) - f_{k-1}(x)$ を計算せよ。

(2) 正の整数 n に対して $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{k}$ を I_n を用いて表せ。

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} I_n$ を求めよ。

(4) 無限級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k}$ の和を求めよ。